

Electromagnétisme de la matièreExamen 2^{ème} session (durée 2h)**I. Question de cours :**

1. Ecrire les quatre équations de Maxwell dans la matière reliant entre eux les vecteurs \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{E} , \mathbf{B} ainsi que les définitions des vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{H} dans la matière.
2. Définitions et différences des trois formes de réponse magnétique : Dia-, Para- et Ferro-magnétismes (*en dix lignes*)

II. Permittivité diélectrique d'un matériau l.h.i.

A) Les données expérimentales concernant la partie réelle ϵ'_r de la permittivité diélectrique relative d'un matériau A , linéaire, homogène et isotrope (l.h.i.), sont :

- pour le domaine de pulsations $\{0 < \omega < 10^{12} \text{ rad/s}\}$: $\epsilon'_r = 16$,
 - pour le domaine de pulsations $\{10^{13} < \omega < 10^{15} \text{ rad/s}\}$: $\epsilon'_r = 9$.
1. Donner l'allure du graphe de $\epsilon'_r(\omega)$ sur tout le spectre et indiquer l'origine physique la plus probable des mécanismes de polarisation de la matière mis en jeu dans ce diélectrique.
 2. Donner la valeur numérique de l'indice de réfraction dans le domaine optique (lumière visible).

B) Les données expérimentales concernant la partie réelle ϵ'_r de la permittivité diélectrique relative d'un matériau B (l.h.i.), sont :

- pour le domaine de pulsations $\{0 < \omega < 10^7 \text{ rad/s}\}$: $\epsilon'_r = 25$,
 - pour le domaine de pulsations $\{10^{10} < \omega < 10^{12} \text{ rad/s}\}$: $\epsilon'_r = 12$,
 - pour le domaine de pulsations $\{10^{13} < \omega < 10^{15} \text{ rad/s}\}$: $\epsilon'_r = 7$.
3. A quel(s) mécanisme(s) microscopique(s) est due la polarisation du matériau B dans le domaine $\{0 < \omega < 10^7 \text{ rad/s}\}$?
 4. Un condensateur plan est composé d'une couche de matériau A d'épaisseur $e = 1 \mu\text{m}$, insérée entre deux armatures planes métalliques. Quelle est la capacité (en F m^{-2}) de ce condensateur à la fréquence $f = 1 \text{ MHz}$. On donne $\epsilon_0 = 1 / 36\pi 10^9$.
 5. Un condensateur plan est composé de deux couches à faces parallèles, superposées, constituées respectivement de matériaux A pour l'une et B pour l'autre, et globalement insérées entre deux électrodes métalliques. L'épaisseur de chaque couche est $e = 1 \mu\text{m}$. Quelle est la capacité (en F m^{-2}) de ce condensateur à la fréquence $f = 1 \text{ MHz}$.
 6. Quelle est la valeur de la permittivité diélectrique relative d'un matériau pour $\omega = 10^{18} \text{ rad/s}$. Justifier.

III. Un cylindre uniformément aimanté selon son axe et infiniment long,

A) En régime statique.

On veut montrer que le champ magnétique créé par la matière à l'intérieur d'un cylindre uniformément aimanté selon son axe et infiniment long peut s'exprimer en

fonction du vecteur aimantation volumique \mathbf{M} et de la perméabilité magnétique du vide μ_0 .

1. Justifier l'écriture du potentiel vecteur créé par la matière sous la forme :

$$\vec{A}_m = \mu_0 \vec{M} \wedge \frac{\epsilon_0 \vec{E}^*}{\rho_0} .$$

2. Démontrer que le champ auxiliaire \mathbf{E}^* en un point intérieur au cylindre est : $\vec{E}_m^* = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \rho \vec{e}_\rho$. En déduire le résultat cherché pour \mathbf{B} en utilisant l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques donnée ci-dessous.

$$\text{rot} \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$

B) En régime sinusoïdal.

On considère un cylindre de rayon R uniformément aimanté, constitué d'un matériau isolant, linéaire, homogène et isotrope, et dont la susceptibilité diélectrique est notée χ_e . Aucun champ externe n'est appliqué. L'aimantation volumique est uniforme et donnée en notation complexe :

$\underline{\mathbf{M}} = M_0 \exp(-i\omega t) \mathbf{e}_z$, où M_0 est réel. On s'intéresse au champ électrique et à la polarisation induits par l'aimantation dépendante du temps. On utilisera les coordonnées cylindriques.

1. Donner l'expression du champ magnétique $\underline{\mathbf{B}}(t)$ créé par la matière à l'intérieur du cylindre en s'inspirant du résultat du paragraphe précédent. On donnera également $\mathbf{B}(t)$ en notation réelle.
2. Montrer par des considérations de symétrie que le champ électrique induit est orienté selon \mathbf{e}_φ .
3. En utilisant la relation de Maxwell-Faraday, établir l'expression du champ électrique $\underline{\mathbf{E}}(t)$ induit à l'intérieur du cylindre en fonction de μ_0 , M_0 , ρ , ω et t . On donnera également $\mathbf{E}(t)$ en notation réelle.
4. Donner l'expression de la polarisation volumique $\underline{\mathbf{P}}$ (et \mathbf{P}) en régime lentement variable en fonction de ϵ_0 , μ_0 , M_0 , χ_e , ω , t , et des coordonnées d'espace. On donne l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot} \vec{V} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial V_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial V_\varphi}{\partial z} \right) \vec{e}_\rho + \left(\frac{\partial V_\rho}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial \rho} \right) \vec{e}_\varphi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho V_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V_\rho}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z$$